Lezioni di matematica

Corso di recupero 1^B

a.s. 2021/2022

Docente: Alessandro Fanizzi

Lezione del 09-mar-22

Insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

Definizione

Un numero naturale si dice primo se ammette come unici divisori 1 e sé stesso.

Nota bene: si può dimostrare che i numeri primi sono infiniti.

ELENCO DEI PRIMI 10 NUMERI PRIMI: 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

Unico numero primo pari

CALCOLO (RAPIDO) DEL MASSIMO COMUNE DIVISORE (MCD) E MINIMO COMUNE MULTIPLO (mcm)

- Se a è un divisore di b, il massimo comune divisore vale a e il minimo comune multiplo vale b.

$$MCD(a;b) = \underbrace{a}_{\text{Divisore di } b} \qquad mcm(a;b) = \underbrace{b}_{\text{multiplo di } a}$$

Esempio: $MCD(5;10) = 5$ $\quad mcm(5;10) = 10$

- Se a e b sono numeri primi, il massimo comune divisore vale 1 e il minimo comune multiplo è dato dal prodotto $a \cdot b$.

$$MCD(a;b) = 1 \qquad mcm(a;b) = \underbrace{a \cdot b}_{\text{prodotto}}$$

Esempio: $MCD(5;7) = 1$ $\quad mcm(5;7) = 35$

Lezione del 16-mar-22

ESPRESSIONI CON NUMERI NATURALI

Calcolo di potenze

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $\quad$ $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $\quad$ $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

$1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $\quad$ $0^5 = 0$

Proprietà delle potenze

- Prodotto di potenze: il prodotto di potenze con la stessa base è una potenza avente come base la stessa base e come esponente la somma degli esponenti:

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$ $\quad$ $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$

- Divisione di potenze: il rapporto di potenze con la stessa base è una potenza avente come base la stessa base e come esponente la differenza tra gli esponenti.

$$a^n : a^k = a^{n-k}$$

$3^8 : 3^6 = 3^{8-6} = 3^2 = 9$ $\quad$ $5^{90} : 5^{88} = 5^{90-88} = 5^2 = 25$

- Potenza di potenza: la potenza di una potenza è una potenza avente come base la stessa base e come esponente il prodotto tra gli esponenti:

$$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$$

$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$ $\quad$ $(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$

- Prodotto di potenze con lo stesso esponente: è una potenza avente come esponente lo stesso esponente e come base il prodotto delle basi:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$ $\quad$ $4^2 \cdot 5^2 = (4 \cdot 5)^2 = 20^2 = 400$

- Il rapporto di potenze con lo stesso esponente è una potenza avente come esponente lo stesso esponente e come base il rapporto tra le basi:

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$20^3 : 5^3 = (20 : 5)^3 = 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ $\quad$ $6^5 : 3^5 = (6 : 3)^5 = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

- La potenza con esponente zero vale 1: $a^0 = 1$

Osservazione: in base alle definizioni precedenti è necessario che $a^0 = 1$, infatti: $a^0 = a^{1-1} = a^1 : a^1 = a : a = 1$

ESPRESSIONI CON NUMERI NATURALI

Precedenza delle operazioni:

- Parentesi tonde, quadre e graffe;
- Se in una espressione non ci sono le parentesi, si dà la precedenza alle operazioni di potenza, moltiplicazione e divisione da sinistra verso destra.

Esempio

$3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$

$4 \cdot 5 : 2 + 1 = 20 : 2 + 1 = 10 + 1 = 11$

$2^3 \cdot 3 : 4 + 5 = 8 \cdot 3 : 4 + 5 = 24 : 4 + 5 = 6 + 5 = 11$

$3^9 : 3^7 \cdot 2 : 6 + 5^0 - 3 = 3^2 \cdot 2 : 6 + 5^0 - 3 = 3^2 \cdot 2 : 6 + 5^0 - 3 = 9 \cdot 2 : 6 + 5^0 - 3 = 18 : 6 + 5^0 - 3$

$= 3 + 5^0 - 3 = 3 + 1 - 3 = 1$

Es. pag. 30 n. 88

$(7 - 5 \cdot 2^0 + 4^2) : 3^2 + 11 \cdot [27 : 3^2 + 48 : 4^2 - 17 : (4^2 + 1)]$

$= (7 - 5 \cdot 1 + 16) : 3^2 + 11 \cdot [27 : 9 + 48 : 16 - 17 : (16 + 1)]$

$= (7 - 5 + 16) : 3^2 + 11 \cdot [27 : 9 + 48 : 16 - 17 : 17]$

$= (2 + 16) : 3^2 + 11 \cdot [3 + 3 - 1]$

$= 18 : 3^2 + 11 \cdot 5$

$= 18 : 9 + 11 \cdot 5$

$= 2 + 55$

$= 57$

Compiti per casa

Es. pag. 29 dal n. 55 al n. 62

Es. pag. 30 dal n. 84 al n. 87

Lezione del 23-mar-22

Correzione es. pag. 30 n. 87

$\{2^3 \cdot (2^4 - 2^2) : 3 \cdot (5 - 3) - 7 - [(2 \cdot 3) \cdot (2^2 + 2) + 2]\} \cdot 2^2$

$= \{2^3 \cdot (16 - 4) : 3 \cdot (5 - 3) - 7 - [(2 \cdot 3) \cdot (4 + 2) + 2]\} \cdot 2^2$

$= \{2^3 \cdot 12 : 3 \cdot 2 - 7 - [6 \cdot 6 + 2]\} \cdot 2^2$

$= \{8 \cdot 12 : 3 \cdot 2 - 7 - [36 + 2]\} \cdot 2^2$

$= \{96 : 3 \cdot 2 - 7 - 38\} \cdot 2^2$

$= \{32 \cdot 2 - 7 - 38\} \cdot 2^2$

$= \{64 - 7 - 38\} \cdot 2^2$

$= 19 \cdot 2^2$

$= 19 \cdot 4$

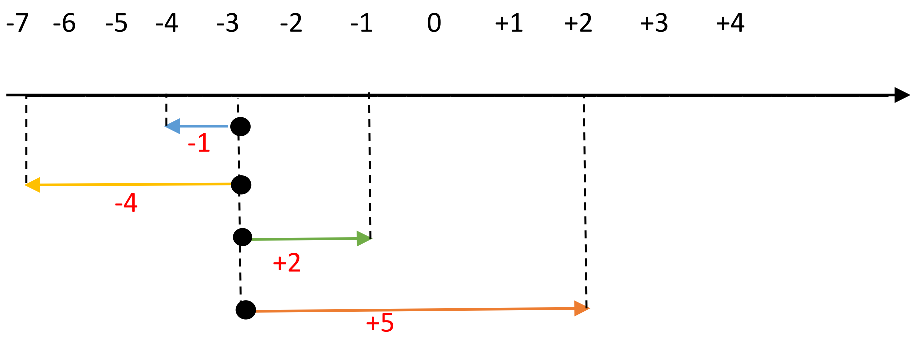
$= 76$

ESPRESSIONI CON NUMERI INTERI RELATIVI

… -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 …

Somma di numeri interi relativi

+	-1	-4	+2	+5
-3	-4	-7	-1	+2
-1	-2	-5	+1	+4
+4	+3	0	+6	+9
+6	+5	+2	+8	+11



Differenza di numeri interi relativi

$-$	-1	-4	+2	+5
-3	-2	+1	-5	-8
-1	0	+3	-3	-6
+4	+5	+8	+2	-1
+6	+7	+10	+4	+1

$(-3)-(-1)=-3+1=-2$

$(-3)-(-4)=-3+4=+1$

$(-3)-(+2)=-3-2=-5$

$(-3)-(+5)=-3-5=-8$

$(-1)-(-1)=-1+1=0$

$(-1)-(-4)=-1+4=+3$

$(-1)-(+2)=-1-2=-3$

$(-1)-(+5)=-1-5=-6$

$(+4)-(-1)=+4+1=+5$

$(+4)-(-4)=+4+4=+8$

$(+4)-(+2)=+4-2=+2$

$(+4)-(+5)=+4-5=-1$

$(+6)-(-1)=+6+1=+7$

$(+6)-(-4)=+6+4=+10$

$(+6)-(+2)=+6-2=+4$

$(+6)-(+5)=+6-5=+1$

Moltiplicazione di numeri interi relativi

Regola dei segni

·	+	-
+	+	-
-	-	+

Esempio

·	-1	-4	+2	+5
-3	+3	+12	-6	-15
-1	+1	+4	-2	-5
+4	-4	-16	+8	+20
+6	-6	-24	+12	+30

ESPRESSIONE CON NUMERI INTERI RELATIVI

Es. pag. 51 n. 371

$$[2-(-3)-(+1)]-[51-62-(-7)]+[1-35-(-15)+8-(-3)]$$

regola dei segni

$$=[2+3-1]-[51-62+7]+[1-35+15+8+3]$$

$$=4-[-4]+[-8]$$

$$=+4+4-8$$

$$=+8-8$$

$$=0$$

Compiti per casa

Es. pag. 51 dal n. 360 al n. 368. Completa le seguenti tabelle:

+	-5	-2	+1	+3
-2				
-1				
+3				
+5				

−	-3	-1	+4	+6
-3				
-2				
+4				
+5				

·	-3	0	+1	+4
-3				
-2				
+1				
+2				

Lezione del 30-mar-22

POTENZE DI NUMERI INTERI RELATIVI

Regole

- Se l'esponente della potenza è pari, il risultato è sempre positivo;

risultato positivo

$(-2)^2 = (-2)(-2) = +4$ $\qquad\qquad$ $(+5)^4 = (+5)(+5)(+5)(+5) = +625$

Base negativa ed esponente pari $\qquad$ base positiva ed esponente pari

- Se l'esponente della potenza è dispari, il risultato ha lo stesso segno della base.

$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$

Base negativa ed esponente dispari

Espressioni con numeri interi relativi

Risolvi la seguente espressione numerica:

Potenze con la stessa base $a = -2$

$(-2)^5 : (-2)^3 + (-3)^8 \cdot (+2)^8 : (-6)^6 + (+5)^4 \cdot (+5)^5 : (+5)^9$

Potenze con lo stesso esponente $n = 8$

$= (-2)^{5-3} + (-6)^8 : (-6)^6 + (+5)^{4+5} : (+5)^9$

$= (-2)^2 + (-6)^{8-6} + (+5)^9 : (+5)^9$

$= (-2)^2 + (-6)^2 + (+5)^{9-9}$

$= +4 + 36 + (+5)^0$

$= 4 + 36 + 1$

$= +41$

Osservazione: è possibile svolgere l'espressione $(+5)^9 : (+5)^9$ nei seguenti due modi:

- Potenze con la stessa base: $(+5)^9 : (+5)^9 = (+5)^{9-9} = (+5)^0 = +1$
- Potenze con lo stesso esponente: $(+5)^9 : (+5)^9 = (+5 : 5)^9 = (+1)^9 = +1$

Risolvi la seguente espressione:

$[(+8)^5 \cdot (+8)^6]^2 : (+8)^{21} + (+7)^3 \cdot (+49)^2 : (+7)^6$

$= [(+8)^{11}]^2 : (+8)^{21} + (+7)^3 \cdot [(+7)^2]^2 : (+7)^6$

$= (+8)^{22} : (+8)^{21} + (+7)^3 \cdot (+7)^4 : (+7)^6$

$= (+8)^1 + (+7)^1$

$= 8 + 7$

$= 15$

NUMERI RAZIONALI

I numeri razionali sono tutti quei numeri che si possono scrivere come rapporto di numeri interi con il denominatore diverso da zero. Denotiamo l'insieme dei numeri razionali con: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$

$\in$: simbolo di appartenenza ad un insieme (si legge "appartiene").

OPERAZIONI CON NUMERI RAZIONALI

Somma algebrica di numeri razionali con lo stesso denominatore

La somma di numeri razionali aventi lo stesso denominatore è un numero razionale avente come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la somma (algebrica) dei numeratori.

Somma dei numeratori

$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = +\frac{7}{3}$ $\qquad$ $\frac{4}{5} - \frac{8}{5} = \frac{4-8}{5} = -\frac{4}{5}$

Il denominatore resta invariato

Somma algebrica di numeri razionali con denominatori diversi

$6:2 \cdot 5 \qquad 6:3 \cdot 7 \qquad\qquad 16:8 \cdot 7 \qquad 16:16 \cdot 3$

$\frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{15+14}{6} = \frac{29}{6}$ $\qquad$ $\frac{7}{8} - \frac{3}{16} = \frac{14-3}{16} = \frac{11}{16}$

mcm(2;3)=6 $\qquad$ mcm(8;16)=16

Compiti per casa

Es. pag. 58 dal n. 474 al n. 478.

Es. pag. 59 dal n. 479 al n. 485.

Es. pag. 61 dal n. 526 al n. 530.

Lezione del 06-apr-22

$\frac{2}{7}-\frac{3}{14}=\frac{4-3}{14}=\frac{1}{14}$ $\frac{5}{9}+\frac{7}{18}=\frac{10+7}{18}=\frac{17}{18}$ $-\frac{3}{8}+\frac{7}{5}=\frac{-15+56}{40}=\frac{41}{40}$

$\frac{7}{2}-\frac{3}{10}=\frac{35-3}{10}=\frac{32}{10}=\frac{16}{5}$

Moltiplicazione di frazioni

Il prodotto di un numero razionale è un numero razionale avente come numeratore il prodotto dei numeratori e come denominatore il prodotto dei denominatori, in formula:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Esempi

$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$ $\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{7}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{7}$ $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)=+\frac{24}{35}$

Divisione di frazione

La divisione di frazioni equivale a moltiplicare la prima frazione per la frazione reciproca (o inversa) della seconda, in formula:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

La frazione reciproca o inversa, si ottiene scambiando il numeratore con il denominatore.

Nota bene: tutti i numeri razionali sono invertibili eccetto zero.

$\frac{4}{5}:\frac{3}{8}=\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{3}=\frac{32}{15}$ $\frac{5}{3}:2=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ $\frac{8}{7}:\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{8}{7}\cdot\frac{5}{3}=-\frac{40}{21}$ $\left(-\frac{9}{2}\right):\left(-\frac{5}{7}\right)=+\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{5}=+\frac{63}{10}$

Potenza di una frazione

La potenza di un numero razionale è un numero razionale avente a numeratore la potenza del numeratore e a denominatore la potenza del denominatore, in formula:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$ $\left(-\frac{4}{5}\right)^2=+\frac{4^2}{5^2}=+\frac{16}{25}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1^3}{2^3}=-\frac{1}{8}$ $\left(+\frac{3}{4}\right)^3=+\frac{3^3}{4^3}=+\frac{27}{64}$

Potenza di un numero razionale con esponente negativo

La potenza di un numero razionale con esponente negativo equivale ad invertire la base e cambiare il segno all'esponente, in formula:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$ $\quad 2^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$ $\quad 3^{-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\frac{1}{27}$ $\quad 4^{-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{1}{16}$

$\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}=\left(-\frac{2}{5}\right)^{3}=-\frac{8}{125}$ $\quad \left(-\frac{3}{7}\right)^{-2}=\left(-\frac{7}{3}\right)^{2}=+\frac{49}{9}$

Potenza di potenza

In modo analogo a quanto visto per i numeri interi, vale la seguente proprietà delle potenze:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]^{k}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot k}$$

Esempio

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{6}=\frac{64}{729}$$

Es. pag. 100 n. 160

$$-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}-\left[\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\right)-\left(+1+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)\right]$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}-\left[\frac{5}{6}-\left(\frac{8-15}{12}\right)-\left(\frac{6+4-5}{6}\right)\right]$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}-\left[+\frac{5}{6}-\left(-\frac{7}{12}\right)-\frac{5}{6}\right]$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}-\left[+\frac{7}{12}\right]$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}-\frac{7}{12}$$

$$=\frac{-9+30-7}{12}$$

$$=\frac{14}{12}$$

$$=\frac{7}{6}$$

MONOMI (cenni)

Si definisce monomio un’espressione algebrica numerica e letterale in cui tutti i termini sono legati dalle operazioni di moltiplicazione o divisione, e le lettere compaiono a numeratore con esponente positivo.

$\frac{2}{3}a$ è un monomio (parte letterale a)

$5a^{-2}$ non è un monomio perché l’esponente di a è negativo.

$\frac{2}{x}$ non è un monomio perché la lettera x compare a denominatore.

$3x + y$ non è un monomio perché compare l’operazione di somma.

Definizione

Si definisce grado di un monomio rispetto ad una lettera, l’esponente di quella lettera.

Si definisce grado complessivo di un monomio, la somma degli esponenti di tutte le lettere che lo compongono.

$2x^3y^4$	grado rispetto a x: 3	grado rispetto a y: 4	grado complessivo: 3+4=7
ab	grado rispetto ad a: 1	grado rispetto a b: 1	grado complessivo: 1+1=2
$2^3x^2 = 8x^2$	grado rispetto a x: 2		grado complessivo: 2